

## 7. 회기 함수는 주판 계산가능하다

2005. 4. 22 / 과학사 및 과학철학 협동과정 정동욱

---

### 연습문제 7.1

초제곱 함수  $\text{sup}(x, y)$ 가 기초적 회기에 의해 정의가능한지 살펴보자.

비형식적 정의 :  $\text{sup}(x, 0) = 1, \text{sup}(x, y+1) = x^{\text{sup}(x, y)}$

$$(i) \text{sup}(x, 0) = 1 = s(z(x)) = \text{Cn}[s, z](x)$$

$$(ii) \text{sup}(x, s(y)) = \text{exp}(x, \text{sup}(x, y)) = \text{Cn}[\text{exp}, \text{id}_1^3, \text{id}_3^3](x, y, \text{sup}(x, y))$$

$$\therefore \text{sup} = \text{Pr}[\text{Cn}[s, z], \text{Cn}[\text{exp}, \text{id}_1^3, \text{id}_3^3]]$$

### 연습문제 7.2

거듭제곱 함수  $\text{exp}(x, y)$ 가 기초적 회기에 의해 정의가능한지 살펴보자.

비형식적 정의 :  $\text{exp}(x, 0) = 1, \text{exp}(x, y+1) = x \cdot \text{exp}(x, y) = \text{prod}(x, \text{exp}(x, y))$

$$(i) \text{exp}(x, 0) = 1 = s(z(x)) = \text{Cn}[s, z](x)$$

$$(ii) \text{exp}(x, s(y)) = \text{prod}(x, \text{exp}(x, y)) = \text{Cn}[\text{prod}, \text{id}_1^3, \text{id}_3^3](x, y, \text{exp}(x, y))$$

$$\therefore \text{exp} = \text{Pr}[\text{Cn}[s, z], \text{Cn}[\text{prod}, \text{id}_1^3, \text{id}_3^3]]$$

$\text{Cn}[s, z], \text{Cn}[\text{prod}, \text{id}_1^3, \text{id}_3^3]$  모두 기초적 회기 함수이므로, 그것의 기초적 회기에 의해 정의가능한  $\text{exp}$  함수 또한 기초적 회기 함수이다.

더 나아가  $\text{exp}$  함수 또한 기초적 회기 함수로 증명되었으므로,  $\text{Cn}[s, z], \text{Cn}[\text{exp}, \text{id}_1^3, \text{id}_3^3]$  모두 기초적 회기 함수이며, 그것들의 기초적 회기에 의해 정의가능한  $\text{sup}$  함수 또한 기초적 회기 함수이다.

### \* 기초적 회기의 확장

한 개의 변수 또는 두 개보다 더 많은 변수를 가진 함수  $h(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ 를 기초적 회기에 의해 정의하기

$$(i) h(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$(ii) h(x_1, x_2, \dots, x_n, s(y)) = g(x_1, x_2, \dots, x_n, y, h(x_1, x_2, \dots, x_n, y))$$

(단,  $f$ 와  $g$  또한 기초적 회기에 의해 정의될 수 있어야 함)

※  $n=0$ 인 경우,  $f$ 는  $s(0), s(s(0)), \dots$  등이어야 함.

### 연습문제 7.3 ( $n=0$ 인 경우의 확장예)

$\text{fac}$ 을 기초적 회기에 의해 정의하라.

비형식적 정의 :  $\text{fac}(0) = 1, \text{fac}(y+1) = (y+1) \cdot \text{fac}(y) = \text{prod}(y+1, \text{fac}(y))$

$$(i) \text{fac}(0) = 1 = s(0)$$

$$(ii) \text{fac}(s(y)) = \text{prod}(s(y), \text{fac}(y)) = \text{Cn}[\text{prod}, \text{Cn}[s, \text{id}_1^2], \text{id}_2^2](y, \text{fac}(y))$$

$$\therefore \text{fac} = \text{Pr}[s(0), \text{Cn}[\text{prod}, \text{Cn}[s, \text{id}_1^2], \text{id}_2^2]]$$