논리철학연습 과제

Chapter 7 - Canonical Models

과학사 및 과학철학 협동과정 2004-20309 정동욱 | 제출일 : 2004.6.16

7.1 표준모형들을 이용해서 지시된 조건들에 대해서 K에 다음의 공리들의 덧붙여졌을 때 얻어지는 체계들의 완전성을 증명하라.

(a) MV $MLp \lor Lp$

(모든 세계들이 막다른 끝이거나 막다른 끝을 볼 수 있다)

<증명> 위의 완전성 증명은 K + MV의 표준모형이 위의 조건을 만족함을 보이는 것으로 충분하다.

모든 $w \in W$에 대해, $ML(p \land \sim p) \lor L(p \land \sim p) \in w$. (∵MV의 대입예). 따라서, $ML(p \land \sim p) \in w$이거나 $L(p \land \sim p) \in w$이다.

(i) $L(p \land \sim p) \in w$인 w는 막다른 끝이다.

$(p \land \sim p)$를 원소로 가진 세계가 없기 때문에, w는 더이상 다른 세계를 볼 수 없다.

(ii) $ML(p \land \sim p) \in w$인 w는 막다른 끝을 보게 된다.

보조정리 6.4에 의해 $L^{-}(w) \cup \{L(p \land \sim p)\}$는 일관적이다, 따라서, w가 보는 세계는 $L(p \land \sim p)$를 원소로 가진다. 그런데, $L(p \land \sim p)$를 원소로 가지는 세계는 막다른 끝이다. 결국 w는 막다른 끝을 본다.

(i), (ii)에 의해 K + MV의 표준모형은 위의 조건을 만족하며, 따라서 K + MV는 주어진 조건의 프레임 집합에 대해 완전하다. (증명끝)

(b) R1 $MLp \supset (p \supset Lp)$

(만일 wRw'이고 $w \neq w'$이면 $\underline{w}Rw''$일 경우 $w''Rw'$이다)

<증명> 귀류법을 쓰기 위해, K + R1의 표준모형의 프레임이 (wRw' & $w \neq w'$ & wRw'')이지만, $w''Rw'$은 아니라고 가정하자.

(i) $w \neq w'$이므로, $\alpha \notin w'$이지만 $\alpha \in w$인 α가 존재. 따라서, $\sim\alpha \in w'$.

(ii) $w''Rw'$이 아니므로, $\beta \notin w'$이지만, $L\beta \in w''$인 β가 존재. 따라서, $\sim\beta \in w'$.

(iii) $L\beta \in w''$이므로, $L(\alpha \lor \beta) \in w''$.

(iv) wRw''이므로, $ML(\alpha \lor \beta) \in w$.

(v) $\alpha \in w$이므로 $\alpha \lor \beta \in w$.

(vi) 여기에 R1을 적용하면 $ML(\alpha \lor \beta) \supset ((\alpha \lor \beta) \supset L(\alpha \lor \beta)) \in w$.

(vii) 따라서 $L(\alpha \lor \beta) \in w$.

이제, wRw'에 의해 $\alpha \lor \beta \in w'$이 되는데, 이는 $\sim\alpha \in w'$, $\sim\beta \in w'$과 모순. 따라서 K + R1은 주어진 조건의 프레임 집합에 대해 완전하다. (증명끝)

(c) $p \supset LMMp$

(만일 wRw'이면 $w'R^2w$이다.)

<증명> 귀류법을 쓰기 위해, (a)(wRw' & $w''Rw$이지만 $w'Rw''$는 아닌 경우) 또는 (b)(wRw' 이지만 w를 볼 수 있는 다른 세계가 없는 경우)를 가정하자.

(a)의 경우

(i) $w'Rw''$이 아니므로, $L\alpha \in w'$이지만, $\alpha \notin w''$인 α 존재.

(ii) 따라서, $\sim\alpha \in w''$.

(iii) wRw'이므로, $ML\alpha \in w$.

(iv) ii)에 주어진 공리를 적용하면, $LLM\sim\alpha \in w''$.

(v) $w''Rw$이므로, $LM\sim\alpha \in w$.

그런데, (iii)과 (v)에 의해 w는 비일관적이 된다. 이는 모순.

(b)의 경우

(증명 미완)

(d) $MLp \supset Mp$

(만일 wRw'이면 wRw''이고 $w'Rw''$인 w''이 존재한다.)

K + $MLp \supset Mp$의 표준모형의 프레임에서, wRw'인 w'에 대해 $w'Rw^*$인 어떤 w^*를 상정하자.

(i) $w'Rw^*$이므로, $L\alpha \in w'$인 모든 α에 대해 $\alpha \in w^*$.

(ii) wRw'이므로, $ML\alpha \in w$. 그리고 공리를 적용하면 $M\alpha \in w$.

(iii) (ii)에 의해 w가 보는 세계 중 적어도 하나는 α들을 원소로 가지고 있어야 한다.

(iv) 그런데 α들을 원소로 가지는 세계는 모두 w'이 볼 수 있다.

(v) 따라서, wRw'이면 wRw''이고 $w'Rw''$인 w''이 존재한다.

결국, K + $MLp \supset Mp$의 표준모형은 위의 조건을 만족하며, 따라서 K + $MLp \supset Mp$ 는 주어진 조건의 프레임 집합에 대해 완전하다. (증명 끝)

<나머지 문제들은 아직 못 풀었습니다. 학기말이라 공부를 게을리 한 탓입니다. 7월에 다시 공부를 시작할 때 온전한 형태로 다시 제출하겠습니다. 죄송합니다.>